

1. ALGUNS ASPECTOS SÔBRE UM POSSÍVEL MODELO MATEMÁTICO
PARA UM HIDROCICLONE

por

J. C. CASSA

COPPE/UFRJ

Apresentado no 1º ENCONTRO NACIONAL DE TRATAMENTO DE MINÉRIOS

COPPE/UFRJ

24 e 25 de maio de 1973

Ilha do Fundão

ALGUNS ASPECTOS SOBRE UM POSSÍVEL MODELO MATEMÁTICO
PARA UM HIDROCICLONE

J. C. Cassa

1. INTRODUÇÃO

O hidrociclone representa o processo mais versátil e simples para a classificação. É aplicado a uma faixa muito ampla de condições e opera com uma retenção ("hold-up") mínima; recomenda-se (1) para a separação de partículas de 2-1000 microns. Os custos de instalação e manutenção são da mesma ordem que os de bombeamento (2). Dependendo das necessidades do processo, o hidrociclone pode ser usado para uma separação total ou parcial, ou ainda conjugado com outros classificadores. Entretanto, a maior vantagem é a operação contínua, sem partes móveis no equipamento. Este é constituído basicamente de uma câmara cilíndrica com uma entrada tangencial, podendo ser cilíndrica em toda a sua extensão (3).

A injeção tangencial da mistura "fluidizada" sólido-líquido produz um movimento em vórtex no interior do hidrociclone. A força centrífuga desenvolvida por este movimento separa as partículas de acordo com os seus tamanhos e densidades, na direção radial, e permite sua separação por fluxos secundários existentes no interior. As partículas mais pesadas e/ou maiores são descarregadas na parte inferior (underflow), enquanto as mais leves e/ou menores, na parte superior ("overflow").

REVISÃO DA LITERATURA

Os principais fatores que afetam a separação (4, 5) são: do hidrociclone - dimensões características (diâmetros, altura, etc.); do líquido - viscosidade, densidade, etc.; da alimentação - pressão, vazão, relação sólido/líquido, etc.; das partículas sólidas - distribuição de tamanhos, forma, densidade, tempo de residência e distância percorrida no interior do hidrociclone, etc.

Até o momento ainda não foi possível quantificar estas variáveis baseando-se em princípios fundamentais. Existem muitas expressões empíricas, como por exemplo as descritas por Mular e Bull (6), onde são apresentadas equações para a capacidade do hidrociclone, tamanho separado, fração de líquido no "overflow" e eficiência da classificação.

A queda de pressão pode ser calculada utilizando as fórmulas de Rietma (7) ou de Shepherd e Lapple (8).

Outras expressões para o cálculo do diâmetro mínimo que pode ser separado são dadas por Zenz e Othmer (9), Ludwig (10), etc.

A distribuição de velocidades é tridimensional. Considerando um hidrociclone cilíndrico, a geometria do problema sugere coordenadas cilíndricas. Então $\underline{v} = \underline{v}(r, \theta, z)$. Entretanto esta generalização torna o problema muito difícil de resolver.

Concha (3), baseado em dados experimentais de Kulsall e considerando um hidrociclone cilíndrico supõe que $v_r = v_r(r)$, $v_\theta = v_\theta(r)$, $v_z = v_z(r, z)$ e $p = p(r)$. A partir da

Integração das equações de Navier-Stokes e continuidade obtém:

$$v_r^* = -kr^*$$

$$v_z^* = 2kz^* + f(r)$$

$$v_\theta^* = \left[\frac{c_1}{Re_r} - \frac{c_2}{Re_r} \exp\left(-\frac{Re_r}{2} - r^{*2}\right) \right] \frac{1}{r^*}$$

$$\Delta p^* = \int_{r_n^*}^1 \frac{v_\theta^{*2}}{2} dr - \frac{k^2}{2} (1 - r_n^{*2})$$

onde

$$c_1 = 2 + Re_r r^{*2}$$

$$c_2 = \left[Re_r (r_n^* - 1) + 2 \right] \exp\left(\frac{Re_r}{2}\right)$$

Re_r = número de Reynolds radial; k = constante arbitrária

Os símbolos com asteriscos (*) indicam grandezas adimensionalizadas.

Um balanço de momentum sobre uma partícula (3) leva a equação para o raio de estabilidade:

$$r_e^* = \frac{2}{9} \frac{\Delta p Re^2}{R \mu f(\xi)} \frac{v_\theta^2}{|v_r|}$$

onde

r_e^* = raio de estabilidade adimensionalizado; R = raio do hidrocí-

clone; $f(\xi)$ = fator de forma; Re = raio equivalente da partícula; ρ = diferença de densidade (partícula-fluido); μ = viscosidade; v_θ = velocidade tangencial do fluido; v_r = velocidade radial do fluido.

ANÁLISE DO PROBLEMA

Neste trabalho seguiremos, sempre que possível, a mesma linha de raciocínio utilizada por Concha (3), tentando, naturalmente, generalizar um pouco mais os resultados.

Considerando um hidrociclone de forma cilíndrica e de núcleo cheio, processando um fluido de propriedades físicas constantes e comportamento newtoniano, desprezando as forças de gravidade e os efeitos de entrada e saída, e considerando ainda que todas as componentes da velocidade são dependentes das direções r e z , isto é, um movimento de pseudo-revolução de segunda espécie, então para o campo de velocidades e pressões podemos escrever:

$$v_z = v_z(r, z), v_r = v_r(r, z), v_\theta = v_\theta(r, z) \text{ e } p = p(r, z)$$

A equação de Navier-Stokes simplificada em (11):

$$\text{componente } r: \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{componente } \theta: \quad \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{componente } z: \quad \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

e a equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_z) = 0$$

Temos quatro incógnitas e quatro equações. Em princípio é possível a solução do problema (*). Entretanto, devido a complexidade e não-linearidade das equações torna-se muito difícil e trabalhosa a solução.

Combinando as equações de Navier-Stokes e continuidade, fazendo $\text{rot } \underline{v} = 2\omega$, onde $\underline{\omega}$ é o vetor vorticidade, obtemos uma equação que só contém termos cinemáticos que é a equação da compatibilidade (12):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \underline{v} - \gamma \nabla^2 \omega = 0$$

(*) Sobre o problema da existência de soluções exatas da equação de Navier-Stokes existe um excelente tratamento dado por Serrin em "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics", Handbuch der Physik, VIII/1, 1959, p. 252.

Definindo-se uma função de corrente $\psi = \psi(r, z)$ de tal maneira que a equação da continuidade seja obedecida, as componentes da velocidade podem ser escritas:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$v_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Definindo ainda uma função $\chi = \chi(r, z)$ poderemos encontrar as componentes da vorticidade:

$$2\omega_r = - \chi'_z$$

$$2\omega_\theta = \frac{1}{r} D^2 \psi$$

$$2\omega_z = \chi'_r + \frac{1}{r} \chi$$

Como temos duas incógnitas (ψ, χ) precisamos de duas equações que as contenha. Efetuando os operadores da equação da compatibilidade e substituindo-os em termos de ψ e χ , ou utilizando a função de corrente em coordenadas ortogonais generalizadas (13), encontra-se para as componentes r e z , respectivamente:

$$\gamma D^4 \psi + \frac{1}{r} \frac{D}{D} \left(\psi, \frac{D^2 \psi}{(r, z)} \right) + \frac{2}{r^2} \psi'_z D^2 \psi + 2\chi \chi'_z = 0$$

$$\gamma D^2 (r\chi) + \frac{1}{r} \frac{D}{D} \left(\psi, \frac{r\chi}{(r, z)} \right) = 0$$

Este sistema de equações também não é fácil de resolver. Entretanto, se fizermos $D^2 \psi = r\chi$ os dois primeiros termos da primeira equação desaparecem e obtemos após algumas transformações simples:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + r \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$$

A solução desta equação é relativamente simples. A família de curvas que satisfazem esta equação, bem como as duas anteriores é dada por:

$$\psi = -r \left[A J_1(nr) + B Y_1(nr) \right] \exp(mz) + \frac{\gamma}{2m} r^2$$

$$\chi = -r \left[A J_1(nr) + B Y_1(nr) \right] \exp(mz)$$

onde $J_1(nr)$ e $Y_1(nr)$ são respectivamente funções de Bessel de primeira e segunda espécie, ambas de primeira ordem: m é uma constante arbitrária diferente de zero; $n = \sqrt{m^2+1}$; A e B são constantes que dependem das condições físicas; γ = viscosidade cinemática.

3.1 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES A e B

Para um raio e altura qualquer do hidrociclone a velocidade é sempre finita, conseqüentemente ψ e χ são sempre finitas. Os valores de $J_1(nr)$ são sempre finitos para qualquer r . Quando r tende para zero (0), $Y_1(nr)$ tende para ∞ . Então B só pode ser zero. Esta condição implica em

$$\psi = -rA J_1(nr) \exp(mz) + \frac{\gamma}{2m} r^2 \quad (\text{equação de } \psi)$$

Podemos então encontrar a componente da velocidade na direção z :

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = n A J_0(nr) \exp(mz) - \frac{\gamma}{m}$$

Mas, em $z = 0$ e $r = R$ (entrada), $v_z = 0$.

Logo,

$$A = \frac{\gamma}{m n J_0(nr)}$$

3.2 DETERMINAÇÃO DE v_z , v_r , e v_θ

$$v_z = \gamma \left[J_0(nr) \exp(mz) / m J_0(nr) - 1/m \right]$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \left[\gamma J_1(nr) / n J_0(nr) \right] \exp(mz)$$

$$v_\theta = \omega r = \left[\gamma J_1(nr) / mn J_0(nr) \right] \exp(mz)$$

Os valores de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ se encontram tabelados no Abramowitz (14). Expressões para o cálculo em computador de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ são encontradas no Kreider (15). A velocidade em um ponto (r,z) é obtida a partir da soma vetorial das componentes $(v_r, v_\theta$ e $v_z)$ e conseqüentemente pode-se determinar todo o campo de velocidade.

3.3 DETERMINAÇÃO DAS LINHAS DE FLUXO (OU DE CORRENTE)

As linhas de fluxo (ψ constante) podem ser mapeadas a partir da equação de ψ . Os pontos (r,z) de uma certa linha de fluxo são obtidos fazendo:

$$z = \frac{1}{m} \ln \left[\frac{\frac{\gamma}{2m} r^2 - \psi}{r A J_1(nr)} \right] \quad z > 0$$

A projeção de qualquer linha de fluxo sobre o plano Or^{θ} é uma espiral logarítmica cuja equação é $r = C \exp(-m\theta)$, onde C é uma constante arbitrária.

3.4 DETERMINAÇÃO DO RAIÃO DE VELOCIDADE AXIAL NULA

Para uma certa linha de fluxo, no ponto onde a velocidade é nula a derivada de z em relação a r (da equação anterior) é zero. Este raio é o raio de velocidade axial nula.

3.5 DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÕES

A partir da integração da equação de Navier-Stokes (componentes r e z), utilizando as equações encontradas anteriormente para as componentes de velocidade e condições de contorno adequadas, chega-se a:

$$\Delta p = M_1(r, z) + N_1(z) + P_1$$

$$\Delta p = M_2(r, z) + N_2(r) + P_2$$

Por comparação é possível determinar $N_1(z)$, $N_2(r)$ e Δp a menos de uma constante.

3.6 VAZÃO NO "OVERFLOW" E "UNDERFLOW"

A vazão ($Q_{1,2}$) entre duas linhas de corrente (16) é a diferença entre os valores destas. Assim,

$$Q_{1,2} = 2\pi (\psi_1 - \psi_2)$$

Pode-se então determinar as vazões no "overflow" e "Underflow".

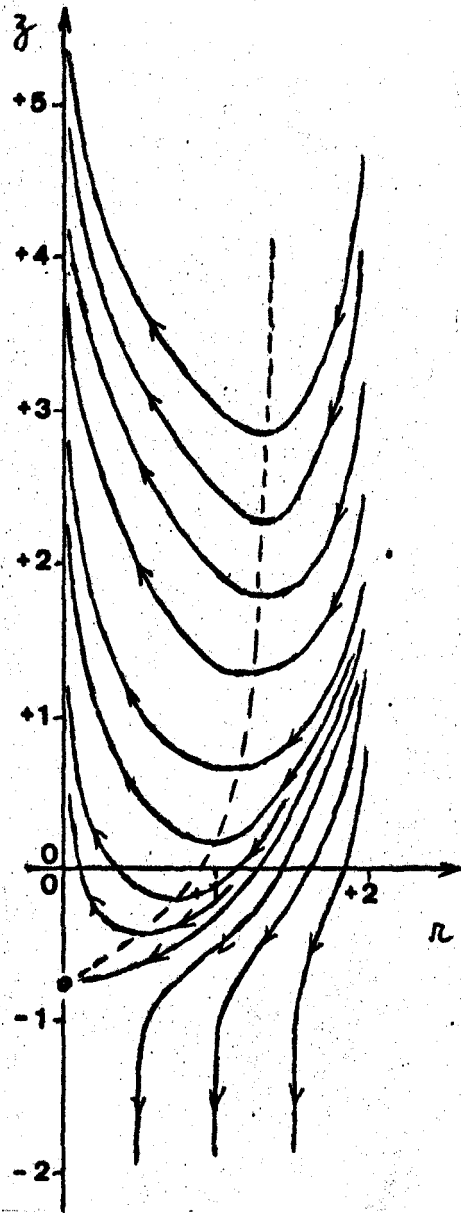
4. CONCLUSÕES

O modelo apresentado corresponde bem a hidrodinâmica do hidrociclone. Entretanto, como a parte cilíndrica destes é geralmente pequena, a validade do modelo é limitada.

Ainda não foi possível obter expressões para o cálculo de variáveis mais "úteis", como por exemplo, eficiência de separação, tamanho separado, etc., tal como nas diversas e variadas equações empíricas.

5. AGRADECIMENTOS

Ao professor R. C. Villas Bôas por haver proposto o problema e ao professor F. Concha pelas valiosas sugestões.



Linhas de fluxo (ψ constante) e raio de velocidade axial nula
(linha pontilhada)

$$R = 2 \quad A = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad B = 0 \quad m = \sqrt{3} \quad n = 2 \quad \gamma = 1$$

BIBLIOGRAFIA

1. Ludwig, E., "Applied Process Design for Chemical and Petrochemical Plants", v. 2, cap. 4, p. 126.
2. Sager, F., "The Hydrocyclone, A New Process Tool", Petroleum Refiner, v. 38, No. 3, p. 193, March 1959.
3. Concha, F., "Fundamentos de las Operaciones Mecanicas", Universidad de Concepcion, 1971.
4. Svanda, J., "Cyclone Calculations and Some Design Parameters Affecting Cyclone Efficiency", International Chemical Engineering, v. 7, No. 2, p. 238, April 1967.
5. Pryor, E. J., "Mineral Processing", Elsevier Publishing Company Ltd., 3a. ed., 1965-
6. Mular, A. L. and Bull, W. R., "Mineral Process Their Analysis, Optimization and Control", Queen's University, 1971.
7. Rietma, K., and Verner, G. G., "Cyclones in Industry", Elsevier Publishing Company, Ltd., 1961.
8. Shepherd, C. B., and Lapple, C. E., "Flow Pattern and Pressure Drop in Cyclone Dust Collectors", Industrial and

Engineering Chemistry, v. 31, No. 8, p. 972, August, 1939.

9. Zenz & Othmer, "Fluidization and Fluid Particle Systems"
10. Kuong, D., "Nomograph Finds Cyclone Particle Size",
Hydrocarbon Processing, v. 46, No. 3, p. 205, March, 1967.
11. Aris, R., "Vectors, Tensors, and The Basic Equations of
Fluid Mechanics", Prentice-Hall, 1962.
12. Berker, R., "Intégration des équations du mouvement d'un
fluide visqueux incompressible", Handbuch der Physik,
VIII/2, p. 1.
13. Goldstein, "Modern Developments in Fluid Dynamics", v. 1,
p. 114.
14. Abramowitz & Segun, "Handbook of Mathematical Functions",
Dover, 1968.
15. Kreider, Kuller, Ostberg & Perkins, "An Introduction to
Linear Analysis", Addison-Wesley, 1966.
16. Shames, I. H., "Mechanics of Fluids", McGraw-Hill, 1962.